Cette égalité reste vraie pour t=0 donc $\forall t \in \mathbf{R}_+, f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$

$\Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k(x) + \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$ ce qui donne que

$\forall x \in \mathbf{R}_+$ on a : $\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$

* $\forall x \in \mathbf{R}_+$ on a : $H_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^{n} I_k(x)$ or on a montré que

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$ et $\lim_{x\to+\infty} I_k(x) = \frac{2}{k^3}$ donc $H_n(x)$ admet une limite l_n, lorsque

x tend vers $+\infty$ vérifiant : $l_n = L - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3}$

d'où $L - l_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3})$

b) D'après **B**- 1°/ b) pour chaque entier $n \geq 1$ on a :

$\forall x \in \mathbf{R}_+ : 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt \leq \frac{a(2-a)}{n} \Rightarrow 0 \leq H_n(x) \leq \frac{a(2-a)}{n}$

d'où $0 \leq \lim_{x\to+\infty} H_n(x) \leq \frac{a(2-a)}{n}$ ce qui entraîne que pour chaque entier $n \geq 1$

on a : $0 \leq l_n \leq \frac{a(2-a)}{n}$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{a(2-a)}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$

c) On vient de montrer que

$\forall n \in \mathbf{N}^*$; $L - l_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3}) \Rightarrow U_n = \frac{1}{2}(L - l_n)$ or

$\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}L = L' \Rightarrow L = 2L'$.